BIEG PO INDEKS Edycja XXV

Etap 1

Zestaw 2

Matematyka

Zadanie 1.

Znaleźć wszystkie pary (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^{2022} + y^{2022} = 1. \end{cases}$$

Zadanie 2.

Obliczyć pole figury będącej zbiorem punktów, których współrzędne *x*, *y* spełniają układ nierówności: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}y \le 0 \\ \sqrt{3}x^2 + xy + 2\sqrt{3}x + 2y \le 0 \end{cases}$.

Zadanie 3.

Zsumowano 20 kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) i otrzymano liczbę 760. Ustalić, które wyrazy tego ciągu zostały zsumowane wiedząc, że dla każdego $n \in N \setminus \{0\}$ spełniony jest warunek: $a_n + a_{n+1} = 3n + 1$.

Zadanie 4.

W ostrosłupie trójkątnym trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają długość 8, dwie z pozostałych krawędzi mają długość 10, a jedna ma długość 12. Obliczyć objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 5.

Ze zbioru liczb $X = \{1, 2, 3, ..., 2n + 1\}$ losujemy (bez zwracania) trzy liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ich suma jest liczbą parzystą.

Informatyka

Zadanie 1.

Program z poniższego listingu, dla następujących wartości tablicy `unsigned char tab[6] = { 0x20, 0xB5, 0x28, 0xAD, 0x2C, 0xB1 };` wypisze w konsoli „A Z Q V Y X”. Jaką treść wpisze ten program przy następujących wartościach `unsigned char tab[6] = {0x24, 0x9d, 0x89, 0x22, 0x97, 0xA7 };`. Podpowiedź: $65_{(10)}$ = ‘A’, $90_{(10)}$ = ‘Z’, $97_{(10)}$ = ‘a’, $122_{(10)}$ = ‘z’.

```
int main()
{
	unsigned char tab[6] = {0x24, 0x9d, 0x89, 0x22, 0x97, 0xA7 };
	for (int i = 0; i < 6; i++)
	{
		if (tab[i] % 2 == 0)
		{
			tab[i] = tab[i] << 1;
			tab[i]++;
		}
		else
		{
			tab[i]--;
			tab[i] = tab[i] >> 1;
		}
	}
	for (int i = 0; i < 6; i++)
	{
			cout << tab[i];
			cout << ' ';
	}
	std::getchar();
    return 0;
}
```

Zadanie 2.

Liczba 6174 jest znana jako stała Kaprekara (od nazwiska indyjskiego matematyka D.R. Kaprekara). Jest ona ciekawa z uwagi na następującą zasadę:
1. Weź dowolną czterocyfrową liczbę, używając co najmniej dwóch różnych cyfr (dozwolone są wiodące zera).
2. Ułóż cyfry w kolejności malejącej, a następnie rosnącej, aby uzyskać dwie liczby czterocyfrowe, w razie potrzeby dodając wiodące zera.
3. Odejmij mniejszą liczbę od większej liczby.
4. Wróć do kroku 2 i powtórz.

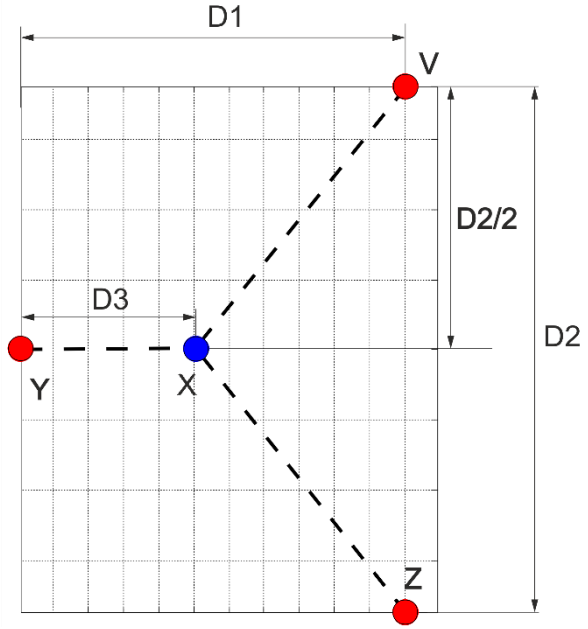
Powyższa zasada, znana jako procedura Kaprekara, zawsze osiągnie swój stały punkt 6174, w co najwyżej 7 iteracjach.
Po osiągnięciu 6174 proces będzie nadal dawał 7641 – 1467 = 6174.
Na przykład dla liczby 2022 stałą 6174 osiąga się po czterech iteracjach:

```
Iteracja 1 dla 2022: 2220 - 0222 = 1998
Iteracja 2 dla 1998: 9981 - 1899 = 8082
Iteracja 3 dla 8082: 8820 - 0288 = 8532
Iteracja 4 dla 8532: 8532 - 2358 = 6174
```

Jedynymi czterocyfrowymi liczbami, dla których procedura Kaprekara nie osiąga wartości 6174, są liczby utworzone z jednakowych cyfr jak 1111. Dają one wynik 0000 po pojedynczej iteracji. Pozostałe czterocyfrowe liczby w końcu osiągają 6174, jeśli wiodące zera są używane do utrzymania liczby cyfr na poziomie 4.
Opracuj w pseudokodzie lub w dowolnym języku programowania funkcję, która dla zadanej dowolnej liczby czterocyfrowej zwróci liczbę iteracji potrzebną do osiągnięcia stałej Kaprekara. Przy czym dla liczby składającej się z tych samych cyfr funkcja powinna zwracać wartość -1.

Zadanie 3.

Studenci Mechaniki i Budowy Maszyn oprogramowali robota, który stacjonuje w punkcie X i z tego miejsca przemieszcza się po linii prostej do punktów V, Y i Z w celu wykonania w nich pewnych czynności (rysunek 1). W dowolnym języku programowania lub w pseudokodzie opracuj program, który dla zadanych długości D1 i D2 zwróci długość D3, dla której |VX|=|YX|=|XZ|.



Rysunek 1. Schemat do analizy położenia punktów charakterystycznych drogi robota

Zadanie 4.

Napisz w dowolnym języku programowania program, który dokonuje konwersji wartości maksymalnie 32-bitowej między następującymi systemami liczbowymi (w dowolną stronę):

- binarny,
- trójkowy,
- dziesiętny,
- szesnastkowy.

System liczbowy wejściowy program powinien rozpoznawać poprzez interpretację następujących symboli występujących tuż przed liczbą do zamiany:

- dla systemu binarnego symbol b,
- dla systemu trójkowego symbol t,

- dla systemu dziesiętnego brak symbolu – system domyślny,
- dla systemu szesnastkowego symbol h.

System liczbowy wyjściowy program powinien rozpoznawać poprzez interpretację powyższych symboli występujących bez liczby. W przypadku gdy celem jest system dziesiętny, program nie potrzebuje żadnego symbolu.

Program powinien uwzględniać wykrywanie cyfr nieprawidłowych dla danego systemu liczbowego i sygnalizować takie użycie przy pomocy stosownego komunikatu.

Przykładowe wykonanie programu w konsoli może wyglądać następująco:

Cel: Konwersja liczby binarnej 101100 do systemu szesnastkowego

Polecenie: konwerter.exe b101100 h

Wynik: 2C

Cel: Konwersja liczby trójkowej 10220 do systemu dziesiętnego

Polecenie: konwerter.exe t10220

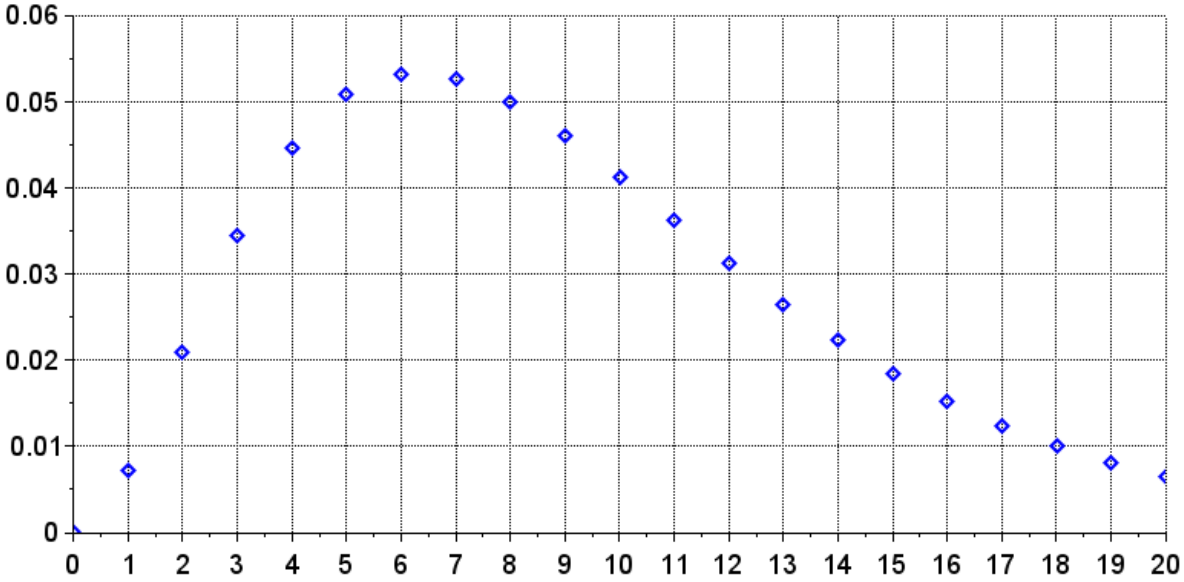
Wynik: 105

Cel: Konwersja liczby dziesiętnej 2022 do systemu binarnego

Polecenie: konwerter.exe 2022 b

Wynik: 11111100110

Zadanie 5.



Rysunek 2. Przebieg poboru mocy

Na rysunku 2 przedstawiono przykładowy przebieg poboru mocy w jednostce czasu. Wartości wszystkich punktów pomiarowych umieszczono w tabeli jednowymiarowej o nazwie P[20]. Stwórz funkcję, która będzie liczyć, a następnie zwracać przybliżoną wartość pola powierzchni pod krzywą.

Podpowiedź: Krzywą można podzielić na mniejsze trapezy.

Fizyka

Zadanie 1.

Na Alsace zderzenia samochodów z Łosiami są tak powszechne, że mają swój skrót MVC (ang. *moose-vehicle collision*). Niech samochód o masie 1000 kg zderza się z łosiem (500 kg) na bardzo śliskiej drodze, w wyniku czego łoś ląduje na masce zatrzymując się na przedniej szybie (bardzo częsty efekt MVC). Jaki procent początkowej energii kinetycznej samochodu zamienia się w inne formy energii? Jak zmienia się ten procent gdy zmienia się masa feralnego łosia?

Zadanie 2.

Na drodze wolno toczonego koła o promieniu 6 cm i masie 0,8 kg jest stopień o wysokości 3 cm. Siły o jakiej minimalnej wartości skierowanej poziomo i przyłożonej do osi koła należy użyć by wtoczyć je na stopień?

Zadanie 3.

W chwili początkowej dwie gwiazdy neutronowe są odległe o 10^{10} m i są w bezruchu. Każda z nich ma masę 10^{30} kg. Jak szybko się poruszają gdy zbliżą się na połowę początkowej odległości? Jak szybko się poruszają tuż przed zderzeniem? Zakładamy, że nabierają prędkości pod wpływem sił wzajemnego przyciągania grawitacyjnego.

Zadanie 4.

Oszacuj, ile zwykłych baloników wypełnionych helem byłoby potrzebnych by unieść człowieka takiego jak Ty. Spróbuj samodzielnie znaleźć potrzebne dane albo zmierzyć potrzebne wielkości.

Zadanie 5.

Evangelista Torricielli, bodaj jako pierwszy, zdał sobie sprawę, że żyjemy „na dnie oceanu powietrza”i założył, że ciśnienie atmosferyczne związane jest z ciężarem tegoż. Oszacuj jaką „głębokość” miałby ten ocean gdyby gęstość powietrza była stała (taka jak przy powierzchni Ziemi – 1,3 kg/m^3). Czy Mount Everest wystawałby ponad jego powierzchnię?